

Arbre pondéré, cours

Probabilités

Calculer des fréquences conditionnelles à partir de tableaux croisés d'effectifs

Arbres de probabilités pondérés : nœud, branche, chemin.



Vocabulaire ensembliste et logique

Symboles de base et notions : appartenance, inclusion, intersection, réunion, complémentaire

Exemple 1 : entraînement pour le triathlon

On rappelle que le triathlon est une discipline qui comporte trois sports : la natation, le cyclisme et la course à pied.

Laurette s'entraîne tous les jours pour un triathlon et organise son entraînement de la façon suivante :



chaque entraînement est composé d'un ou deux sports et commence toujours par une séance de course à pied ou de vélo ;

lorsqu'elle commence par une séance de course à pied, elle enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de 0,4

lorsqu'elle commence par une séance de vélo, elle enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de 0,8

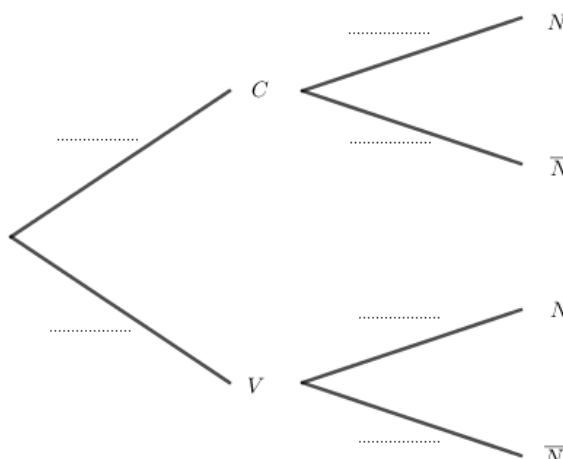
Un jour d'entraînement, la probabilité que Laurette pratique une séance de vélo est de 0,3

On note : C l'événement : « Laurette commence par une séance de course à pied »

V l'événement : « Laurette commence par une séance de vélo » ;

N l'événement : « Laurette enchaîne par une séance de natation ».

Compléter l'arbre de probabilité suivant représentant la situation :



Bilan :

Rappel :

Sachant que $\bar{N}$ est l'événement contraire de N , on peut écrire :

$$p(\bar{N}) = 1 - p(N)$$

De la même façon, on pourra écrire que :

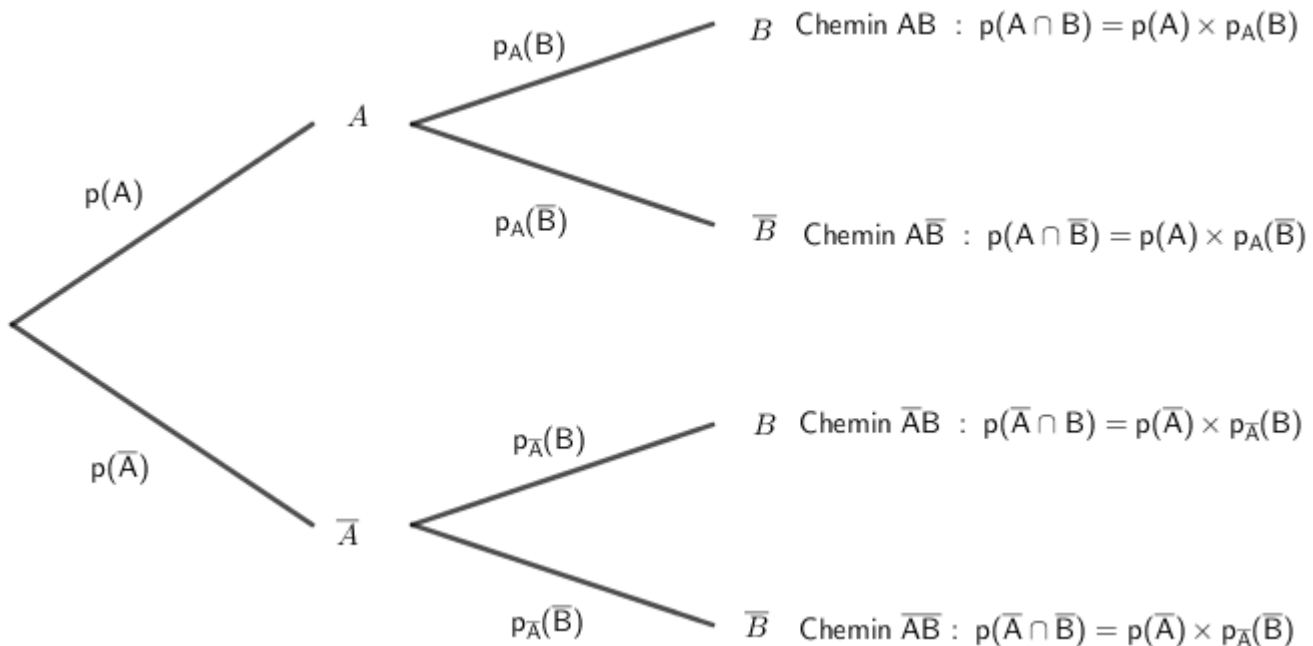
$$p_c(\bar{N}) = 1 - p_c(N)$$

Remarque :

Il faut bien vérifier que la somme des quatre probabilités est égale à 1.

L'arbre de probabilités permet de modéliser des probabilités conditionnelles :

Propriété d'un arbre de probabilités :



A savoir :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

(il suffit de lire le chemin)

On en déduit :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ avec } p(A) \neq 0$$

Exemple 2, au musée : (compléter un arbre)

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.

Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.

Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée.

Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet.



Une étude est réalisée. Elle révèle que :

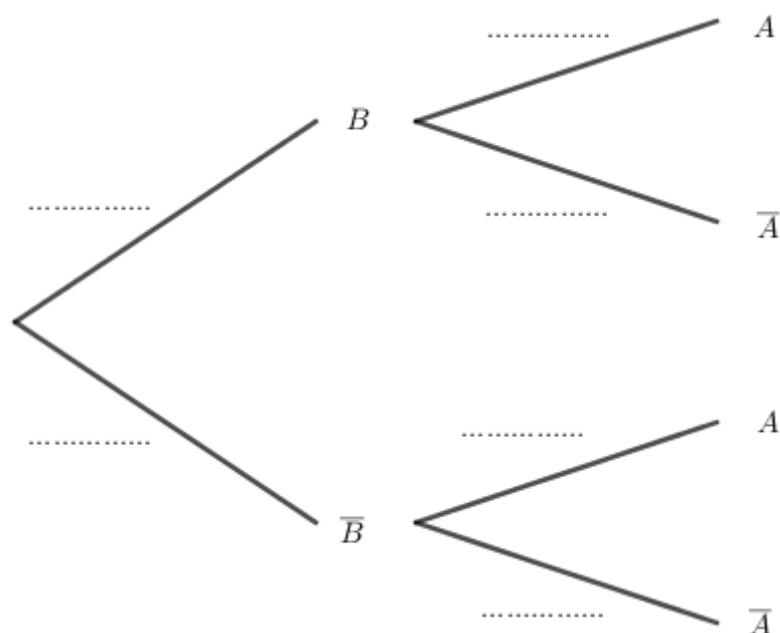
- 70 % des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les événements suivants :

A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;

B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



Exemple 3 : opération commerciale (compléter et utiliser un arbre)

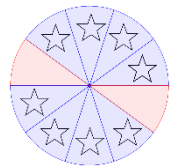
Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

Étape 1 :

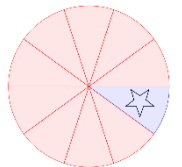
chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;

Étape 2 :

– s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile;



– sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.



Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Partie A

Un client joue à ce jeu. On note :

N : l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 »;

E : l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1) Justifier que $P(N) = 0,3$ et que $P_N(E) = 0,8$.

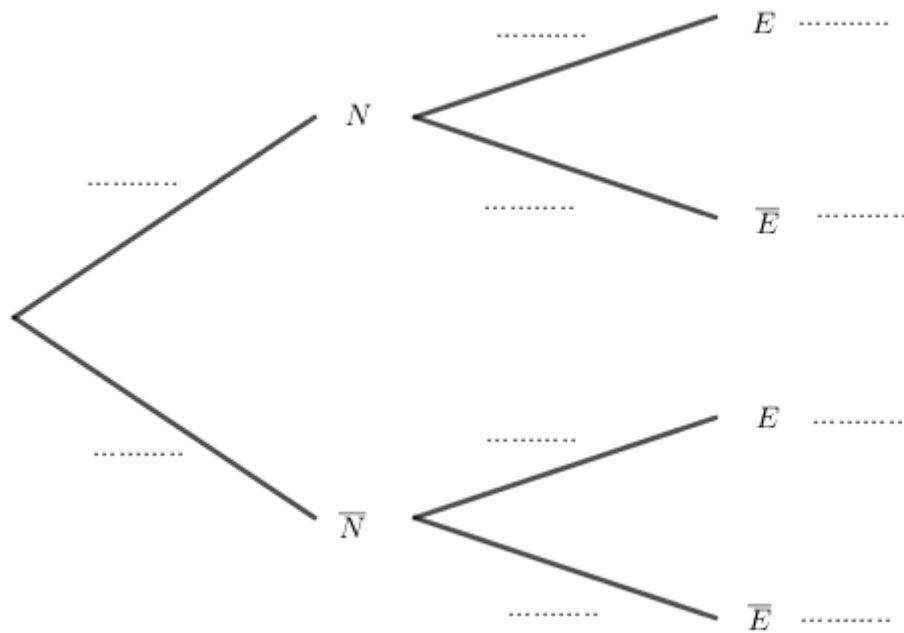
.....

.....

.....

.....

2) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.



3) Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.

.....

.....

.....

.....

Exemple 4 : défauts sur des téléviseurs (compléter et utiliser un arbre)

Une étude a montré que des téléviseurs peuvent rencontrer deux types de défauts : un défaut sur la dalle, un défaut sur le condensateur.

L'étude indique que :

- 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle et parmi ceux-ci
- 2 % ont aussi un défaut sur le condensateur.

On choisit au hasard un téléviseur et on considère les évènements suivants :

D : « le téléviseur a un défaut sur la dalle »

C : « le téléviseur a un défaut sur le condensateur ».

Les résultats seront approchés si nécessaire à 10^{-4} près.

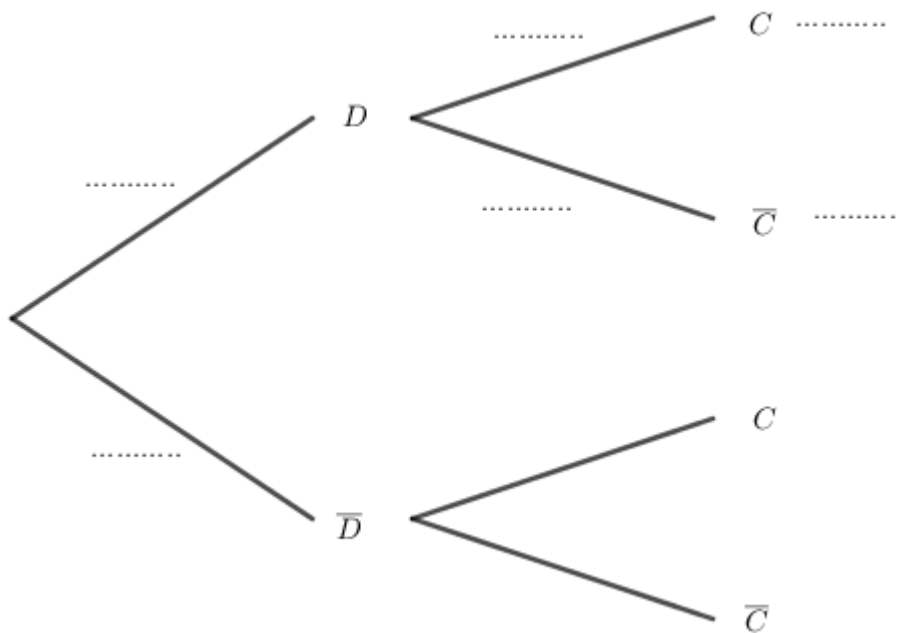
- 1) Exprimer les deux données numériques de l'énoncé sous forme de probabilités.

.....

.....

.....

- 2) Compléter l'arbre ci-dessous et compléter uniquement les pointillés par les probabilités associées :



- 3) Calculer la probabilité $p(D \cap C)$ de l'événement $D \cap C$.

.....

.....

.....

Exercice 5 : Sondage à la Banque (compléter et utiliser un arbre)

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

53 % de ses clients ont plus de 50 ans ;

32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits *risqués* ;

25 % de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits *risqués*.

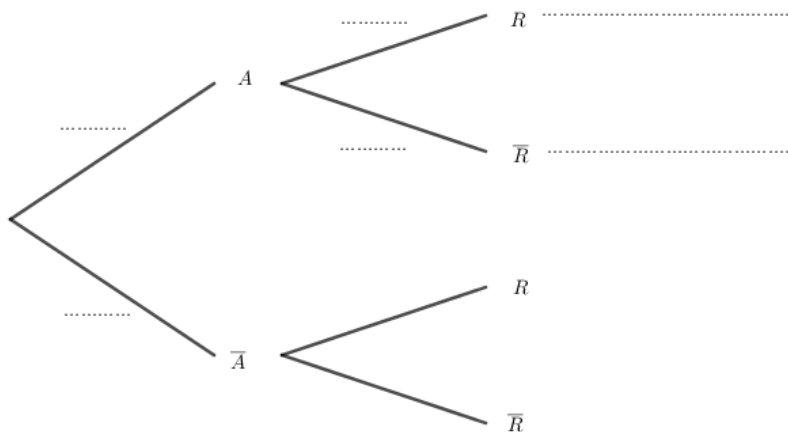
On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les événements suivants :

A : « Le client a plus de 50 ans » ;

R : « Le client est intéressé par des placements dits *risqués* ».

1) Donner $p(R)$ et $p_A(R)$.

2) Complétez ci-dessous l'arbre pondéré correspondant à la situation.



3) Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits *risqués* est 0,132 5.

Exercice 6 : Course cycliste (compléter et utiliser un arbre)

Lors d'une course cycloportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés. Aucun participant n'abandonne la course.

Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.

Parmi les non licenciés, 17 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

L « le cycliste est licencié dans un club » et $\bar{L}$ son évènement contraire, M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\bar{M}$ son évènement contraire.

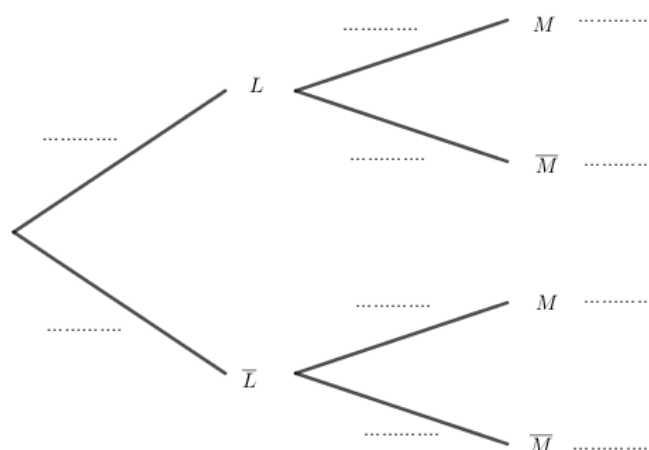
- 1) À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $p(L)$, $p_L(M)$ et $p_{\bar{L}}(M)$.

.....

.....

.....

- 2) Compléter l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



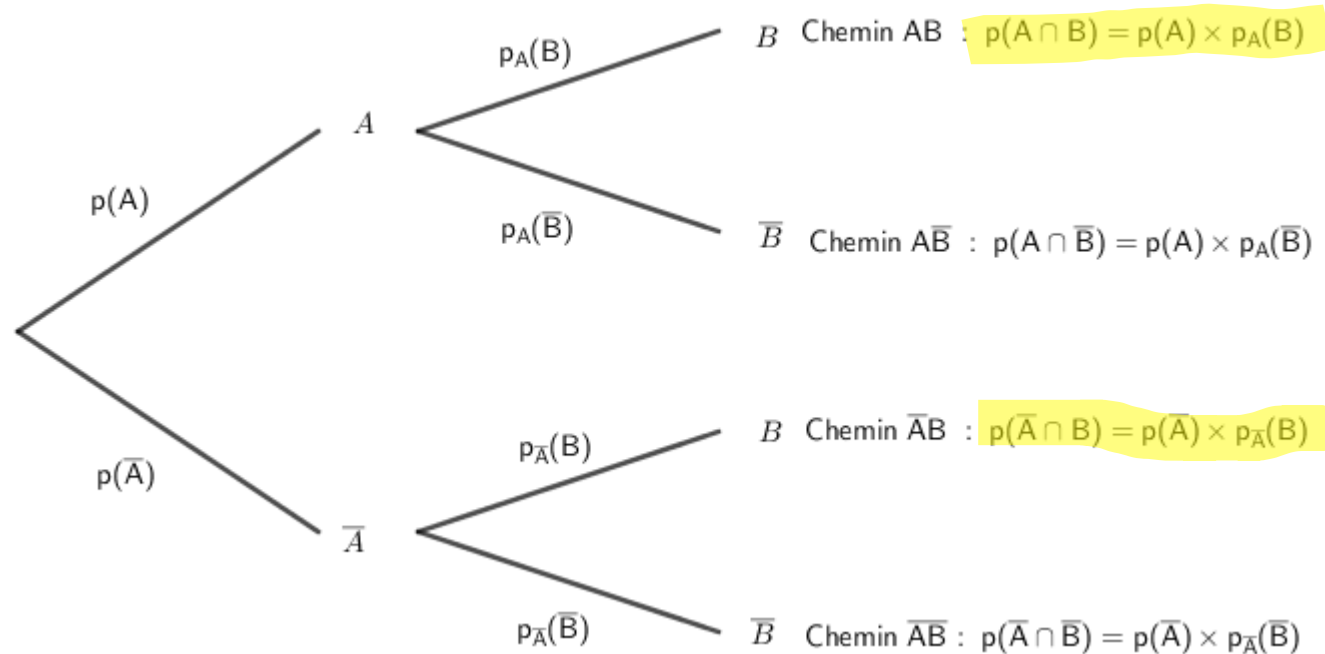
- 3) Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

.....

.....

Formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$



Événements indépendants :

Deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de l'autre, autrement dit si l'une des deux égalités suivantes est vérifiée.

$$P(B) = P_A(B) \Leftrightarrow P(A) = P_{\bar{A}}(B)$$

Conséquence :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercice 7 : imprimante 3 D

Sur la fiche technique d'une imprimante 3D, il est indiqué que :

La probabilité que la pièce ait un défaut de forme **et** un défaut de couleur est de 0,05 ;

La probabilité que la pièce ait un défaut de forme parmi celles ayant un défaut de couleur est de 0,20 ;

La probabilité que la pièce n'ait pas de défaut de forme parmi celles n'ayant pas de défaut de couleur est de 0,80.

On prend une pièce au hasard. Soient les événements :

C : « défaut de couleur »

F : « défaut de forme. »

1) Quelles sont les valeurs des probabilités : $P(C \cap F)$, $P_C(F)$ et $P_{\bar{C}}(\bar{F})$

.....

.....

.....

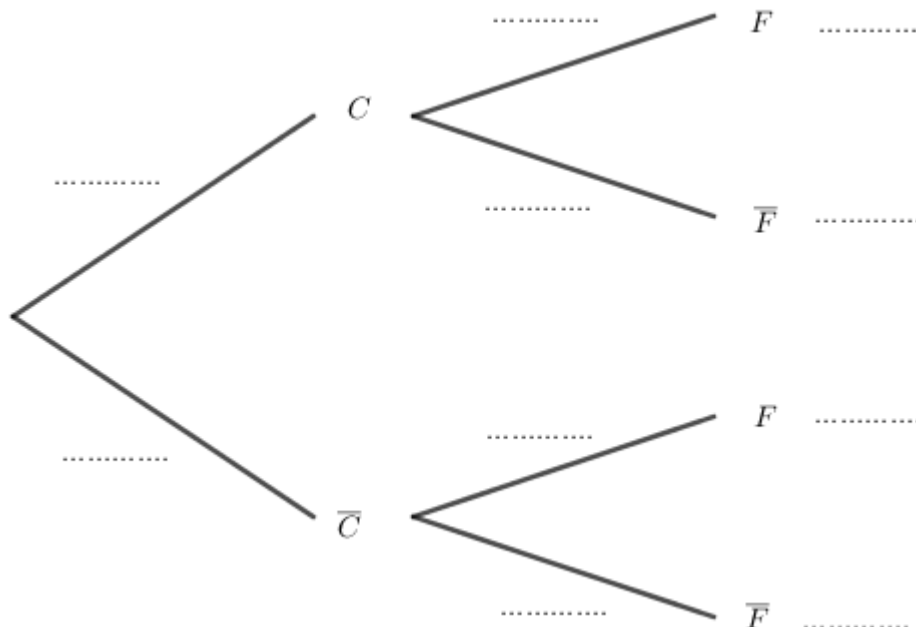
2) Proposez une méthode permettant de déterminer $P(\bar{C} \cap \bar{F})$, la probabilité que l'imprimante produise une pièce sans défaut ?

.....

.....

.....

3) Complétez l'arbre de probabilité pondéré résumant la situation :



Calculez $P(\bar{C} \cap \bar{F})$

.....

.....

4) Calculez $P(F)$ (formule des probabilités totales)

5) Montrez que les événements C et F sont indépendants.

6) L'imprimante 3D est censée produire au moins 60 % des pièces sans défaut. Est-ce le cas ?

Exercice 8 : agence immobilière

Une étude sur les clients et les biens vendus par un réseau d'agences immobilières a montré que :

0,5% des clients annulent la vente **et** versent un acompte ;

5 % des clients qui ont annulé la vente ont versé un acompte ;

85% des clients qui n'ont pas annulé la vente ont versé un acompte.

On prend un client au hasard. Soient les événements :

A : « annule la vente »

B : « verse un acompte »

1) Quelles sont les valeurs des probabilités : $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$

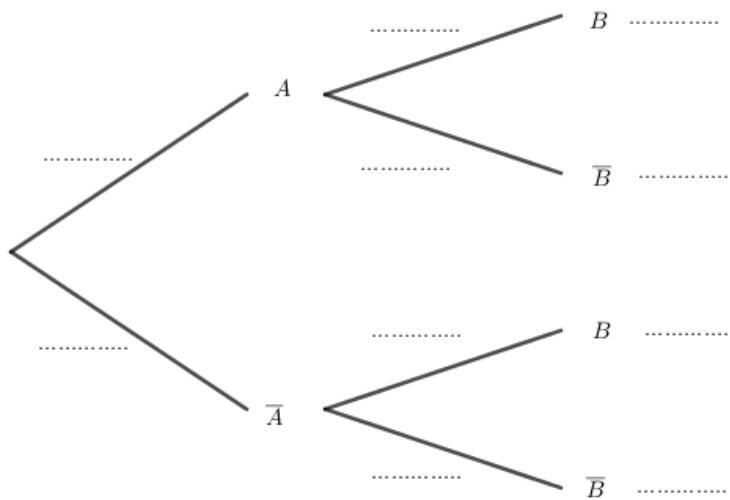
- 2) Proposez une méthode permettant de déterminer $P(\bar{A} \cap B)$, la probabilité de tomber sur un client finalisant la vente et versant un acompte.

.....

.....

.....

- 3) Complétez l'arbre de probabilité pondéré résumant la situation :



- 4) Calculez $P(\bar{A} \cap B)$

.....

.....

- 5) Calculez $P(B)$ (formule des probabilités totales)

.....

.....

.....

- 6) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

.....

.....

7) Peut-on affirmer que au moins 75 % des clients finalisent la vente **et** versent un acompte ?
